

第3节 圆的切线有关的计算 (★★☆)

内容提要

1. 求圆 $C:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 过点 $P(x_0, y_0)$ 的切线:

①若点 P 在圆上, 如图 1, 可由 $PC \perp l$ 找到切线 l 的斜率 (斜率可能不存在, 此时切线即为 $x = x_0$), 结合点 P 可求得切线方程.

②若点 P 在圆外, 如图 2, 可设切线斜率为 k (需先考虑斜率不存在的情况), 结合点 P 写出切线的方程, 并由圆心到直线的距离 $d = r$ 来解 k .

2. 计算切线长: 如图 2, 切线长 $|PA| = |PB| = \sqrt{|PC|^2 - r^2}$.

3. 计算切点弦方程: 如图 3, 点 $P(x_0, y_0)$ 在圆 $C:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 外, PA, PB 是两条切线, A, B 是切点, 则 $PA \perp AC, PB \perp BC$, 所以 P, A, C, B 四点都在以 PC 为直径的圆上 (如图 4), AB 恰好为该圆与圆 C 的公共弦, 故可由两圆的方程作差求得直线 AB 的方程.

4. 切线和切点弦方程的结论: 设点 $P(x_0, y_0)$, 将圆的标准方程 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 变成 $(x-a)(x_0-a)+(y-b)(y_0-b)=r^2$, 或在圆的一般式方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 中, 用 x_0x 替换 x^2 , 用 y_0y 替换 y^2 , 用 $\frac{x+x_0}{2}$ 替换 x , 用 $\frac{y+y_0}{2}$ 替换 y , 可以得到一个新方程, 当 P 在圆上时, 如图 1, 该方程表示切线 l ; 当 P 在圆外时, 如图 3, 该方程表示切点弦 AB 所在直线的方程.

5. 如图 3, 四边形 $PACB$ 的面积 $S = S_{\triangle PAC} + S_{\triangle PBC} = \frac{1}{2}|PC| \cdot |AD| + \frac{1}{2}|PC| \cdot |BD|$
 $= \frac{1}{2}|PC| \cdot (|AD| + |BD|) = \frac{1}{2}|PC| \cdot |AB|.$

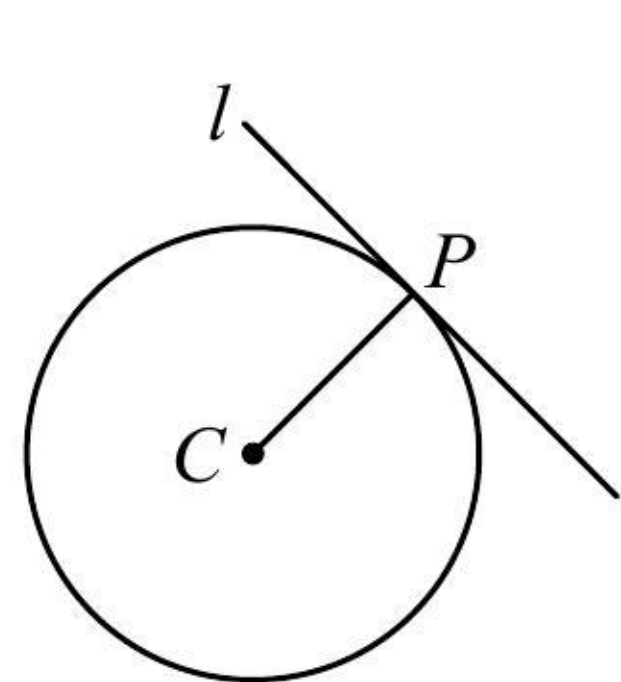


图1

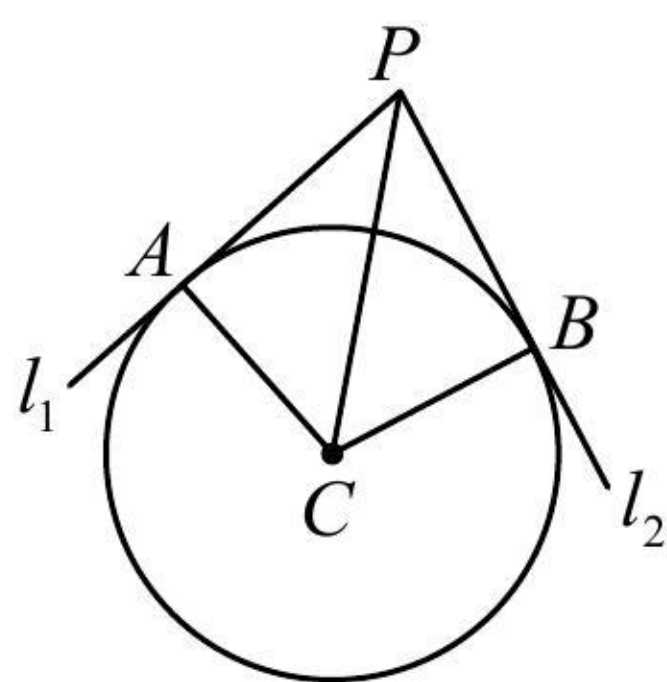


图2

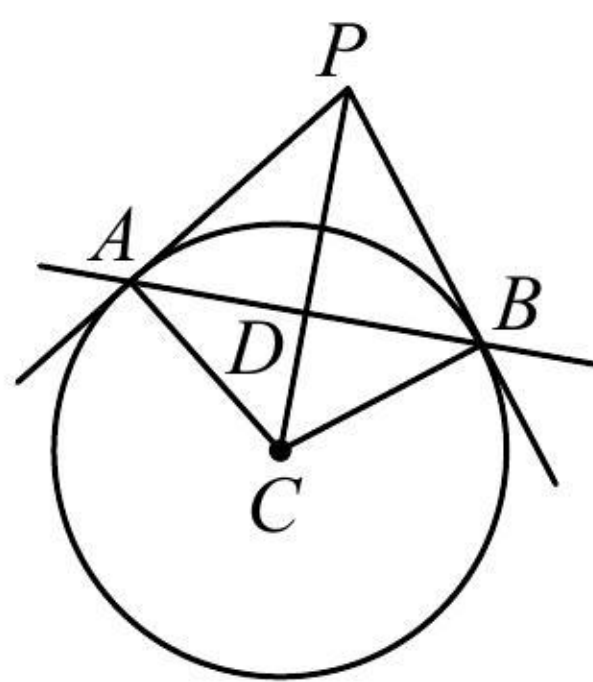


图3

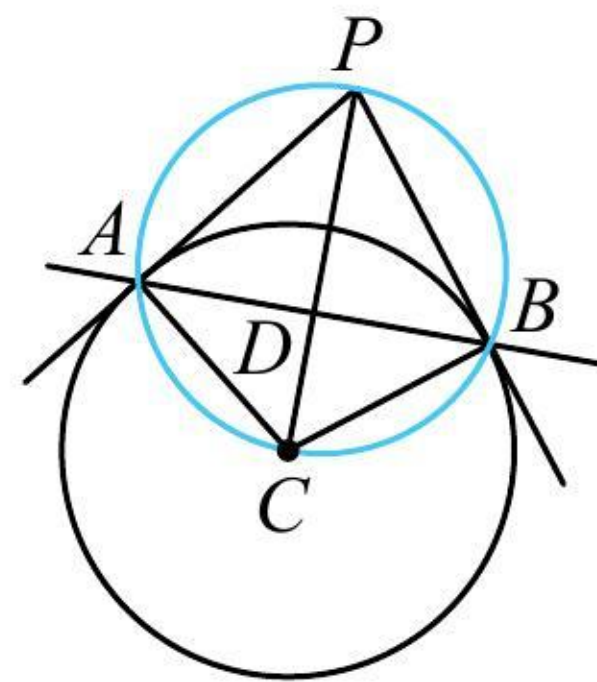


图4

典型例题

类型 I: 求圆的切线方程

【例 1】圆 $C:(x-1)^2+y^2=4$ 过点 $P(2, \sqrt{3})$ 的切线方程为_____.

解法 1: 先看点 P 在圆上还是圆外, $(2-1)^2+(\sqrt{3})^2=4 \Rightarrow P$ 在圆 C 上,

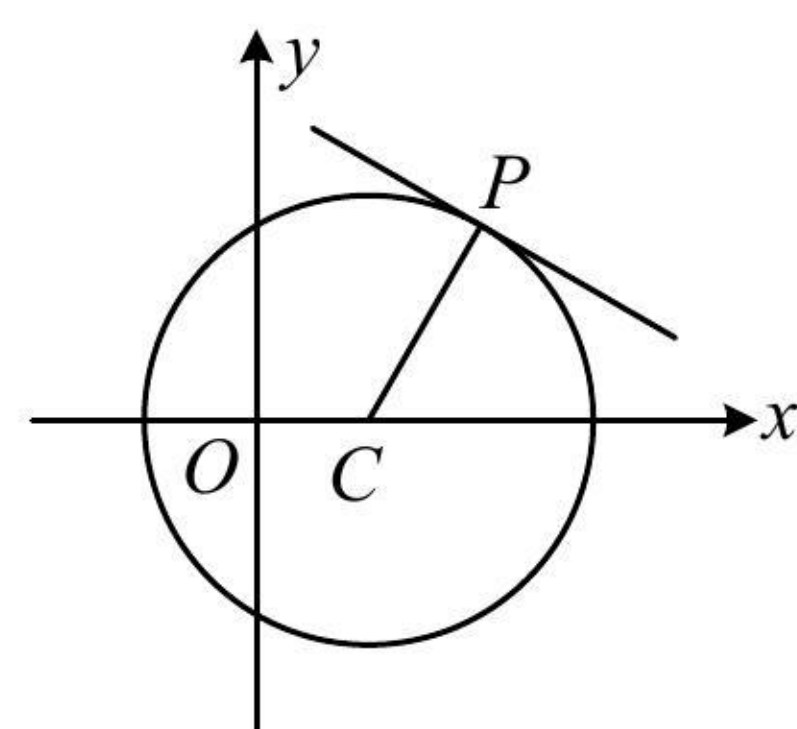
故可由 $PC \perp$ 切线来算切线斜率, 如图, $C(1,0)$, $k_{PC} = \frac{\sqrt{3}-0}{2-1} = \sqrt{3} \Rightarrow$ 切线的斜率为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$,

所以切线方程为 $y - \sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-2)$, 整理得: $x + \sqrt{3}y - 5 = 0$.

解法 2: 按解法 1 判断出点 P 在圆上后, 也可直接用内容提要第 4 点的结论来写切线的方程,

所求切线的方程为 $(2-1)(x-1) + (\sqrt{3}-0)(y-0) = 4$ ，整理得： $x + \sqrt{3}y - 5 = 0$.

答案： $x + \sqrt{3}y - 5 = 0$



【变式】过 $P(0,2)$ 作与圆 $C: x^2 + y^2 - 2x = 0$ 相切的直线 l ，则 l 的方程为_____.

解析： $x^2 + y^2 - 2x = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow$ 圆心为 $C(1,0)$ ，半径 $r = 1$ ，

如图， P 在圆外，求切线可设斜率，并由 $d = r$ 求解斜率，先考虑斜率不存在的情况，

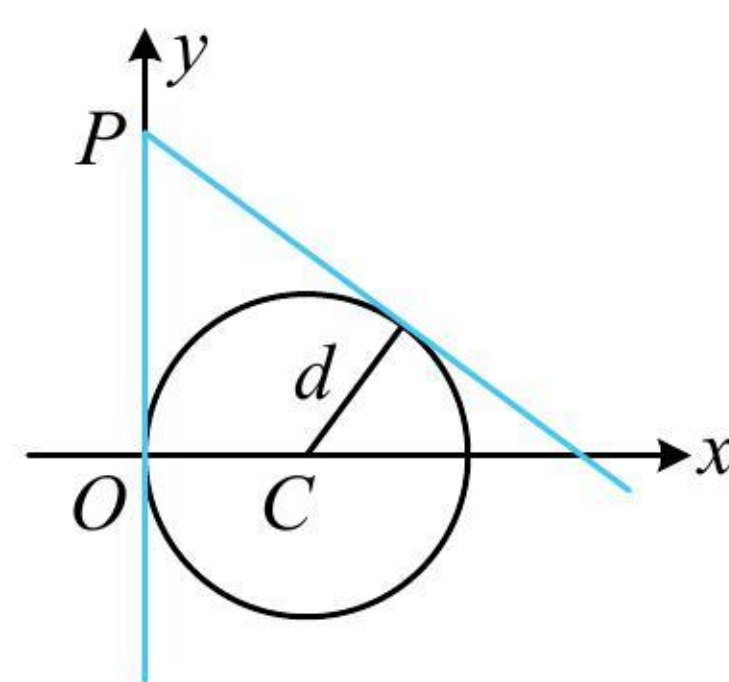
当 $l \perp x$ 轴时，其方程是 $x = 0$ ，满足 l 与圆 C 相切；

当 l 不与 x 轴垂直时，设其方程为 $y = kx + 2$ ，即 $kx - y + 2 = 0$ ①，圆心 C 到直线 l 的距离 $d = \frac{|k+2|}{\sqrt{k^2+1}}$ ，

若 l 与圆 C 相切，则 $d = r$ ，即 $\frac{|k+2|}{\sqrt{k^2+1}} = 1$ ，解得： $k = -\frac{3}{4}$ ，代入①整理得： $3x + 4y - 8 = 0$ ；

综上所述， l 的方程为 $x = 0$ 或 $3x + 4y - 8 = 0$.

答案： $x = 0$ 或 $3x + 4y - 8 = 0$



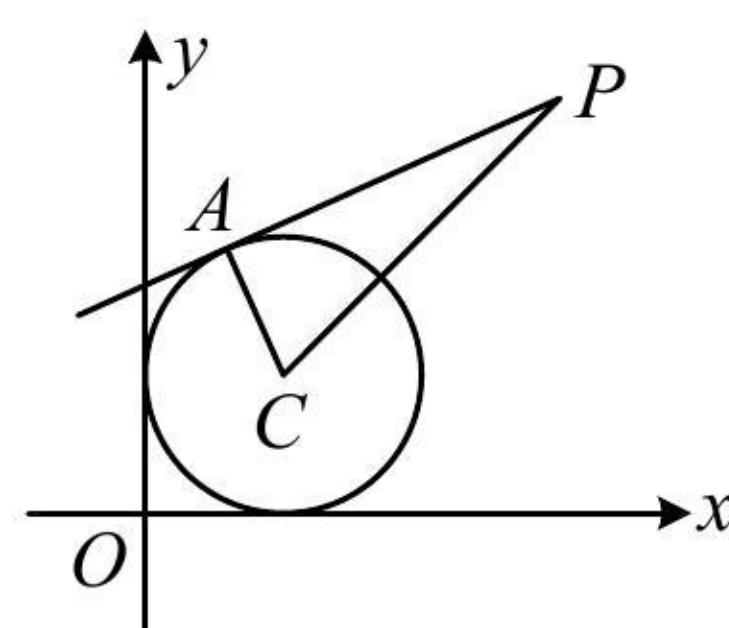
类型 II：切线长有关计算

【例 2】已知圆 $C: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ ，过点 $P(3,3)$ 作直线与圆 C 相切于点 A ，则 $|PA| =$ _____.

解析：如图，切线长 $|PA|$ 可在 $\triangle PAC$ 中由勾股定理计算，所以只需求出 $|PC|$ 即可，

$$C(1,1) \Rightarrow |PC| = \sqrt{(3-1)^2 + (3-1)^2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow |PA| = \sqrt{|PC|^2 - |AC|^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 1^2} = \sqrt{7}.$$

答案： $\sqrt{7}$



【变式 1】已知直线 $l: x+2y-1=0$ 和圆 $C: (x+1)^2+(y+2)^2=4$ ，过 l 上的动点 P 作圆 C 的切线 PA ， A 为切点，则 $|PA|$ 的最小值为 ()

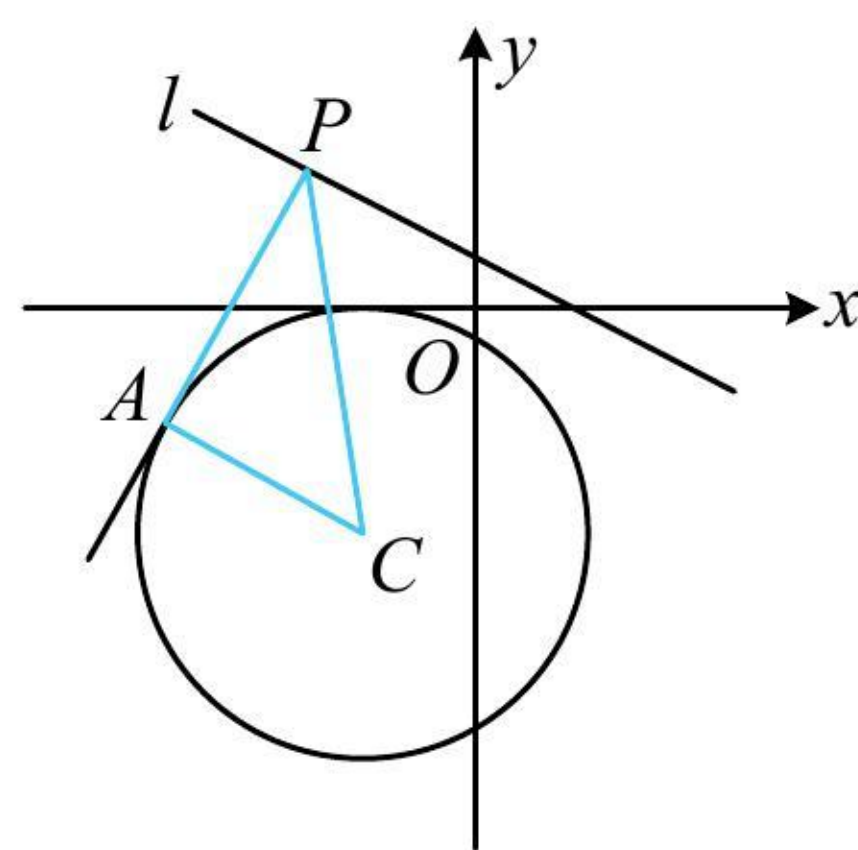
- (A) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ (B) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (C) $\frac{4\sqrt{70}}{5}$ (D) $\frac{2\sqrt{70}}{5}$

解析：如图， $|PA| = \sqrt{|PC|^2 - |AC|^2} = \sqrt{|PC|^2 - 4}$ ①，

要使 $|PA|$ 最小，只需 $|PC|$ 最小，而 $|PC|$ 的最小值即为点 $C(-1, -2)$ 到直线 l 的距离，

所以 $|PC|_{\min} = \frac{|-1+2 \times (-2)-1|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$ ，代入①得 $|PA|_{\min} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ 。

答案：A



【变式 2】(2021 · 新高考 I 卷)(多选) 已知点 P 在圆 $(x-5)^2+(y-5)^2=16$ 上，点 $A(4,0)$ ， $B(0,2)$ ，则 ()

- (A) 点 P 到直线 AB 的距离小于 10
 (B) 点 P 到直线 AB 的距离大于 2
 (C) 当 $\angle PBA$ 最小时， $|PB| = 3\sqrt{2}$
 (D) 当 $\angle PBA$ 最大时， $|PB| = 3\sqrt{2}$

解析：要判断 A、B 选项，可直接画图来分析点 P 到直线 AB 距离的取值范围，先求直线 AB 的方程，

由题意，直线 AB 的方程为 $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$ (截距式)，整理得： $x+2y-4=0$ ，

如图 1，点 P 到直线 AB 的距离 d 的最大值、最小值分别在 P_1 ， P_2 处取得，其中 $P_1P_2 \perp AB$ ，

因为圆心 $C(5,5)$ 到 AB 的距离为 $\frac{|5+2 \times 5-4|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{11\sqrt{5}}{5}$ ，半径 $r=4$ ，所以 $d_{\max} = \frac{11\sqrt{5}}{5} + 4$ ， $d_{\min} = \frac{11\sqrt{5}}{5} - 4$ ，

故 $\frac{11\sqrt{5}}{5} - 4 \leq d \leq \frac{11\sqrt{5}}{5} + 4$ ，因为 $\frac{11\sqrt{5}}{5} - 4 < 2$ ， $\frac{11\sqrt{5}}{5} + 4 < 10$ ，所以 A 项正确，B 项错误；

对于 C、D 选项，如图 2，当 $\angle PBA$ 最小时， P 位于 P_3 处，当 $\angle PBA$ 最大时， P 位于 P_4 处，

其中 P_3B 和 P_4B 均与圆 C 相切，且 $|P_3B| = |P_4B|$ ，它们都是切线长，可先求 $|BC|$ ，再由勾股定理求它们，

因为 $|BC| = \sqrt{(5-0)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{34}$ ，所以 $|P_3B| = |P_4B| = \sqrt{|BC|^2 - 16} = 3\sqrt{2}$ ，故 C 项和 D 项均正确。

答案：ACD

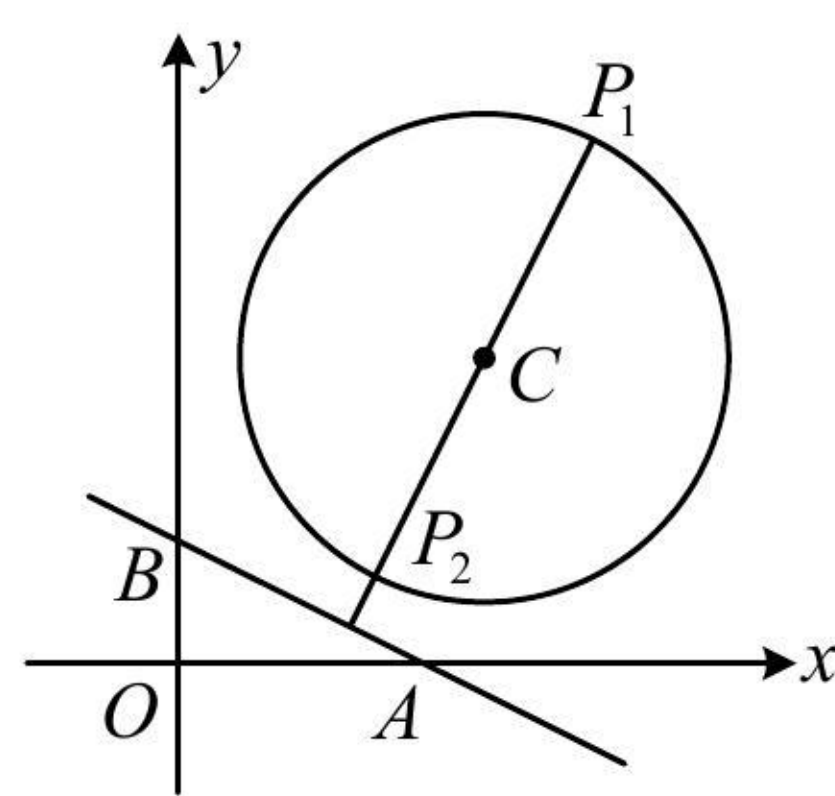


图1

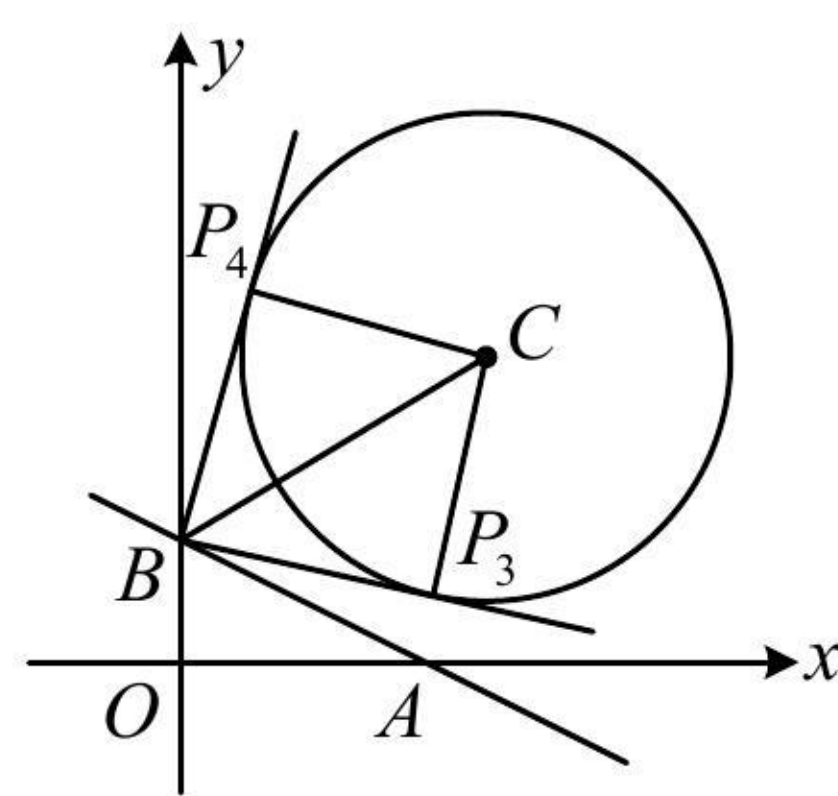


图2

【反思】从例2及两个变式可以看出，算切线长，关键是算圆外的点与圆心的距离。

类型III：切点弦相关计算

【例3】过点 $P(3,1)$ 作圆 $C:(x-1)^2 + y^2 = 1$ 的两条切线，切点分别为 A, B ，则直线 AB 的方程为 ()

- (A) $2x + y - 3 = 0$ (B) $2x - y - 3 = 0$ (C) $4x - y - 3 = 0$ (D) $4x + y - 3 = 0$

解法1：切点弦的方程，可按两圆的公共弦来算，如图，由题意， $PA \perp AC$ ， $PB \perp BC$ ，所以 P, C, A, B 四点都在以 PC 为直径的圆上，

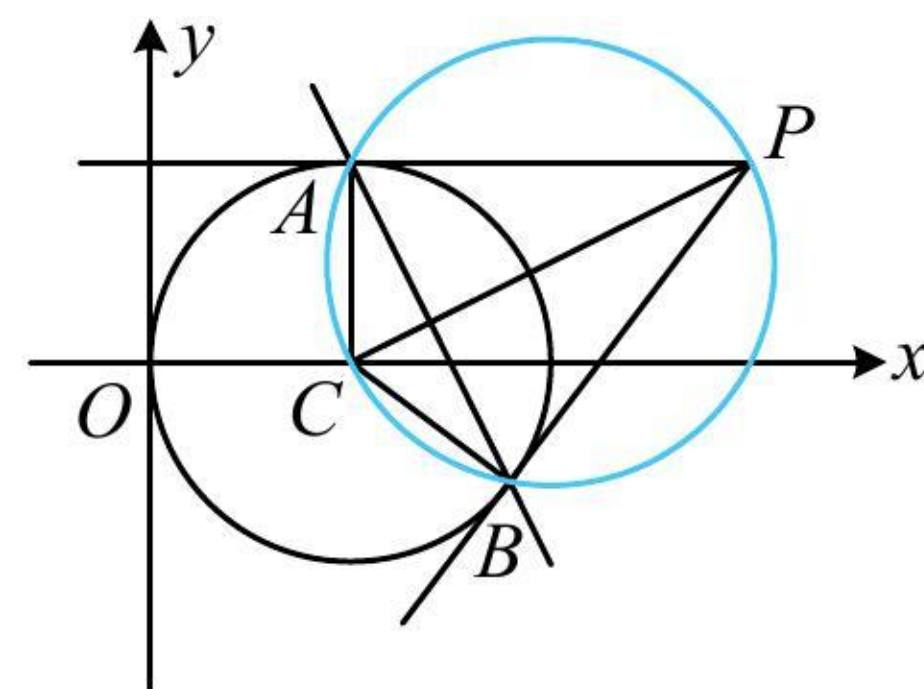
又 $C(1,0)$ ，所以 PC 中点为 $(2, \frac{1}{2})$ ， $|PC| = \sqrt{(3-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{5}$ ，

故以 PC 为直径的圆的方程为 $(x-2)^2 + (y-\frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4}$ ，

与圆 C 的方程作差整理得直线 AB 的方程为 $2x + y - 3 = 0$ 。

解法2：也可用内容提要第4点的结论，直线 AB 的方程为 $(3-1)(x-1) + 1 \times y = 1$ ，整理得： $2x + y - 3 = 0$ 。

答案：A



【反思】上述解法1的过程中，为什么用两圆方程作差就能得到公共弦 AB 所在直线的方程？因为作差得到的必为直线方程，且两交点 A, B 都满足该方程，故该方程即为公共弦 AB 所在直线的方程。

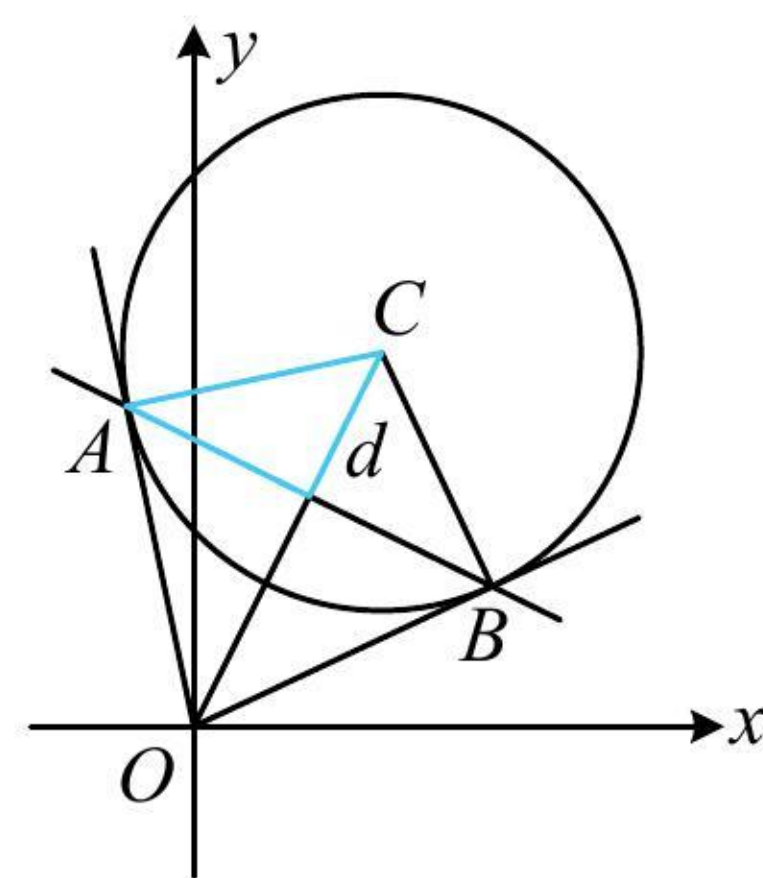
【变式1】已知圆 $C:(x-1)^2 + (y-2)^2 = 2$ ，过原点作圆 C 的两条切线，切点分别为 A, B ，则 $|AB| = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解析：如图，可先用结论求出切点弦 AB 的方程，按直线 AB 被圆截得的弦长来算 $|AB|$ ，

由题意，切点弦 AB 的方程为 $(0-1)(x-1) + (0-2)(y-2) = 2$ ，整理得： $x + 2y - 3 = 0$ ，

圆心 $C(1,2)$ 到直线 AB 的距离 $d = \frac{|1 + 2 \times 2 - 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ，所以 $|AB| = 2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{2 - \frac{4}{5}} = \frac{2\sqrt{30}}{5}$ 。

答案： $\frac{2\sqrt{30}}{5}$



【变式 2】(多选) 已知圆 $M:(x+1)^2 + y^2 = 2$, 直线 $l:x-y-3=0$, 点 P 在直线 l 上运动, 直线 PA, PB 分别与圆 M 相切于点 A 和 B , 则 ()

- (A) 四边形 $PAMB$ 的面积的最小值为 $2\sqrt{3}$
 (B) $|PA|$ 最短时, 直线 AB 的方程为 $x-y-1=0$
 (C) $|PA|$ 最短时, $|AB| = \sqrt{6}$
 (D) 直线 AB 过定点 $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

解析: A 项, 如图, $M(-1,0)$, $|AM|=|BM|=\sqrt{2}$, 设四边形 $PAMB$ 的面积为 S ,

则 $S = 2S_{\triangle PAM} = 2 \times \frac{1}{2} |AM| \cdot |PA| = \sqrt{2} |PA|$, $|PA|$ 是切线长, 可在 $\triangle PAM$ 中用勾股定理转化为 $|PM|$ 来算,

又 $|PA| = \sqrt{|PM|^2 - |AM|^2} = \sqrt{|PM|^2 - 2}$, 所以 $S = \sqrt{2} \cdot \sqrt{|PM|^2 - 2}$ ①, 故当 $|PM|$ 最小时, S 也最小,

由图可知当 $PM \perp l$ 时, $|PM|$ 最小, 故 $|PM|_{\min} = \frac{|-1-3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = 2\sqrt{2}$, 代入①得 $S_{\min} = 2\sqrt{3}$, 故 A 项正确;

B 项, 由 $|PA| = \sqrt{|PM|^2 - 2}$ 知 $|PA|$ 最短时, $|PM|$ 也最短, 此时 $PM \perp l$,

可由此求得 PM 的方程, 与 l 联立求出 P 的坐标, 直线 l 的斜率为 1, 所以 PM 的斜率为 -1,

结合 $M(-1,0)$ 可得 PM 的方程为 $y = -(x+1)$, 即 $x+y+1=0$, 联立 $\begin{cases} x+y+1=0 \\ x-y-3=0 \end{cases}$ 解得: $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$, 故 $P(1,-2)$,

求出了点 P , 就可由切点弦结论写出直线 AB 的方程,

直线 AB 的方程为 $(1+1)(x+1) - 2y = 2$, 整理得: $x-y=0$, 故 B 项错误;

C 项, $|PA|$ 最短时, AB 的方程是 $x-y=0$, $|AB|$ 可按直线被圆 M 截得的弦长来算, 先求 d ,

圆心 M 到直线 AB 的距离 $d = \frac{|-1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $|AB| = 2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{2 - \frac{1}{2}} = \sqrt{6}$, 故 C 项正确;

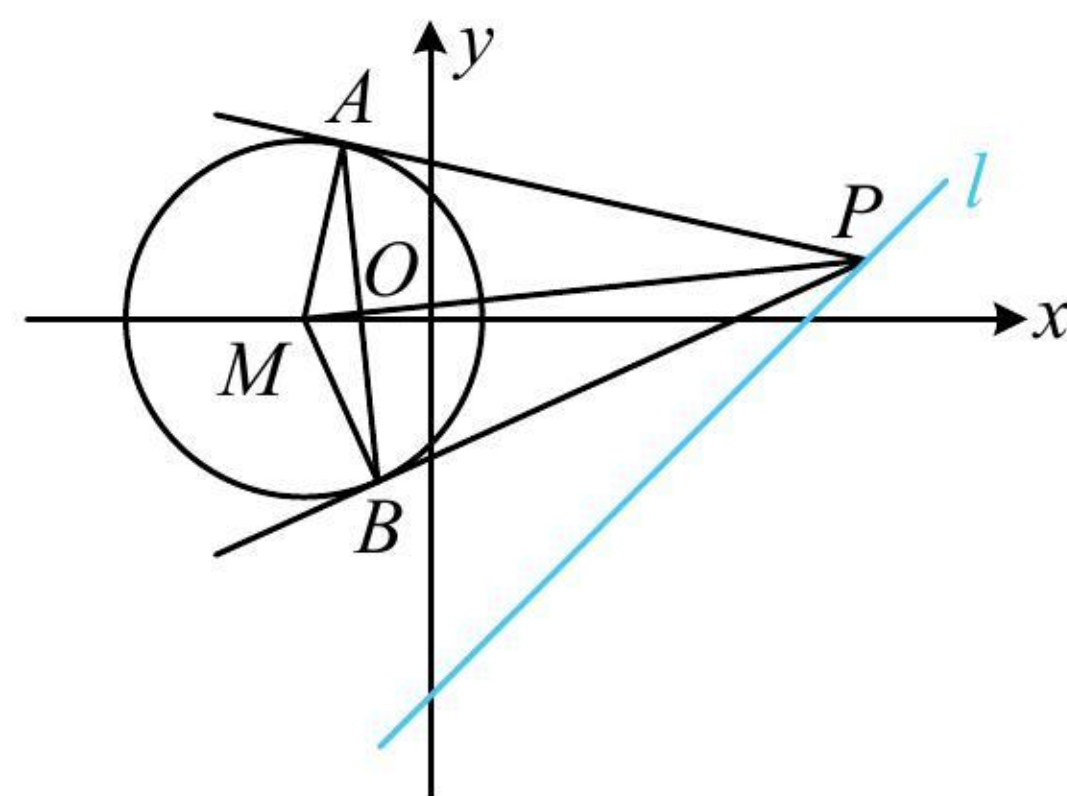
D 项, 要找直线 AB 过的定点, 得求 AB 的方程, 可先设 P 的坐标, 用切点弦结论来写 AB 的方程,

$x-y-3=0 \Rightarrow y=x-3$, 点 P 在直线 $y=x-3$ 上, 故可设 $P(a, a-3)$,

则由切点弦结论, 直线 AB 的方程为 $(a+1)(x+1) + (a-3)y = 2$, 整理得: $a(x+y+1) + (x-3y-1) = 0$,

令 $\begin{cases} x+y+1=0 \\ x-3y-1=0 \end{cases}$ 解得: $\begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}$, 所以直线 AB 过定点 $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, 故 D 项正确.

答案: ACD



【反思】切点弦的结论在选填题中用起来很方便, 但例 3 解法 1 给出的推导方法, 也需要掌握. 若遇到解答题, 则可用该方法来求切点弦方程.

强化训练

1. (2022 · 云南玉溪模拟 · ★) 已知直线 l 经过点 $P(1,3)$, 且 l 与圆 $x^2 + y^2 = 10$ 相切, 则 l 的方程为 ()
- (A) $x+3y-10=0$ (B) $x-3y+8=0$ (C) $3x+y-6=0$ (D) $2x+3y-11=0$

《一数·高考数学核心方法》

2. (2023 · 重庆模拟 · ★) 过点 $A(2,3)$ 作圆 $M: x^2 + y^2 = 1$ 的一条切线, 切点为 B , 则 $|AB| = ()$
- (A) 3 (B) $2\sqrt{3}$ (C) $\sqrt{7}$ (D) $\sqrt{10}$

3. (★★) 已知圆 C 的圆心坐标是 $(0, m)$, 半径长是 r . 若直线 $2x - y + 3 = 0$ 与圆相切于点 $A(-2, -1)$, 则 $m =$ _____, $r =$ _____.

4. (2023·江西宜春模拟·★★) 直线 l 过点 $P(2,2)$ 且与圆 $C:(x+1)^2 + y^2 = 9$ 相切, 则直线 l 的方程为_____.

5. (★★) 已知圆 $C:(x-2)^2 + (y-4)^2 = 16$, 过点 $P(-1,0)$ 作圆 C 的两条切线, 切点分别为 A, B , 则 $|AB| =$ _____.

6. (2022·安徽模拟·★★) 直线 $l:x+y-4=0$ 平分圆 $C:x^2 + y^2 - 2bx - 2by - 5 + b^2 = 0$ 的周长, 过点 $P(-b,1)$ 作圆 C 的一条切线, 切点为 Q , 则 $|PQ| =$ _____.

《一数·高考数学核心方法》

7. (2022·河南安阳模拟·★★★★) 已知圆 $C:(x-2)^2 + (y-6)^2 = 4$, 点 M 为直线 $l:x-y+8=0$ 上的动点, 过 M 作圆 C 的两条切线, 切点分别为 A 和 B , 则四边形 $MACB$ 的周长的最小值为 ()

- (A) 8 (B) $6\sqrt{2}$ (C) $5\sqrt{2}$ (D) $2+4\sqrt{2}$

8. (2022·湖北模拟·★★★★) 若圆 $C:(x-2)^2 + (y+1)^2 = 2$ 关于直线 $l:ax+2by+6=0$ 对称, 过 $P(a,b)$ 作圆 C 的一条切线, 切点为 A , 则 $|PA|$ 的最小值为 ()

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 6

9. (2022·浙江温州模拟·★★★★) 过 x 轴正半轴上一点 $P(x_0, 0)$ 作圆 $C: x^2 + (y - \sqrt{3})^2 = 1$ 的两条切线, 切点分别为 A 和 B , 若 $|AB| \geq \sqrt{3}$, 则 x_0 的最小值为 ()

- (A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) 2 (D) 3

10. (2020·新课标 I 卷·★★★★) 已知圆 $M: x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$, 直线 $l: 2x + y + 2 = 0$, P 为 l 上的动点, 过点 P 作圆 M 的切线 PA, PB , 切点为 A, B , 当 $|PM| \cdot |AB|$ 最小时, 直线 AB 的方程为 ()

- (A) $2x - y - 1 = 0$ (B) $2x + y - 1 = 0$ (C) $2x - y + 1 = 0$ (D) $2x + y + 1 = 0$